

非可換従順作用

鈴木悠平 北海道大学

September 16, 2022

今日の群:

G : 局所コンパクト群

Γ : 可算群

従順性：無限を直感の効く世界を通して理解できることを保証.

例：群の従順性 (例：可換群, 可解群, 劣指数増大群, 力学系から現れるいくつかの興味深い群,...)

⇔

- 良い平均 (⇔ マルコフ=角谷の不動点定理, エントロピー),
- チェザロ和の一般化
(⇔ 群 C^* 環 $C_r^*(G) \subset \mathbb{B}(L^2(G))$ の普遍性, 近似性質 CPAP).
- 解析的な深い構造に手が届く
(⇔ 群フォンノイマン環の分類, 群作用の分類, ...)

従順でないと・・・(例：自由群 $\mathbb{F}_d$, $\mathbb{F}_d < G, \dots$)

⇔

- バナッハ=タルスキーのパラドックス ($\mathbb{F}_d < \mathrm{SO}(3)$)
⇔ 作用はなんでもあり. 高度な解明は一般に期待できない.
- $C_r^*(\mathbb{F}_\infty)$ 単純だが, その普遍版 $C^*(\mathbb{F}_\infty)$: 全ての可分 C^* 環が商!

例：作用の従順性

Zimmer(測度空間), Anantharaman-Delaroche(位相空間): 群 G 自体が非従順でも, 作用によっては従順群と同様の良い振る舞いをする.

例：

- プロパー作用 (e.g., $G \curvearrowright G$.)
- 双曲群 Γ のグロモフ境界 $\Gamma \curvearrowright \partial\Gamma$,
- ポワソン=フルステンベルグ境界 e.g., $\mathrm{SL}_d(\mathbb{R}) \curvearrowright$ (full flag variety).
- 小澤, Brozki–Cave–Li: 完全群 G ($:= - \rtimes_{\mathbb{R}} G$ が完全).
 $\iff \exists G \curvearrowright X$ コンパクト空間上の従順作用.
(Cf. $\iff G$ は距離空間として従順 (Yu の性質 A)).

たくさんの応用: 軌道同値関係の分類・剛性, バウム=コンヌ予想, フォンノイマン環の分類・構造理論, など.

今日の話題：従順作用の非可換版？

Cf.

- 測度空間 $(X, \mu) \longleftrightarrow L^\infty(X, \mu)$ の非可換版：フォンノイマン環.
- 局所コンパクトハウスドルフ空間 $X \longleftrightarrow C_0(X)$ の非可換版： C^* 環.

$G \curvearrowright A$ 従順？

基本となる問：正しい定義？ 面白い例？ どんな現象？

応用： C^* 環の新しい表示，群作用の分類.

問：非可換従順作用の正しい定義？

実は古い問題.

フォンノイマン環のとき：決定的な定義：70年代末には知られている (Delaroche).

答：フォンノイマン環上の作用

$$G \curvearrowright M$$

の従順性はその中心上

$$G \curvearrowright Z(M)$$

からのみ起因する.

注意： M は (X, μ) ; $Z(M) \cong L^\infty(X, \mu)$ 上の因子環バンドルに分解する.
(直積分分解 $G \curvearrowright (X, \mu)$; $M = \int_X^\oplus M_x d\mu(x)$.)

結論：フォンノイマン環上の従順作用は、真に非可換な現象とはなり得ない. (バンドルの底空間 $G \curvearrowright (X, \mu)$ に帰着される.)

⇨ 作用素環論的に真に面白い現象ではない.

今日の主題： C^* 環ではどうか？ フォンノイマン環の時と同様面白くない？

上の定義の真似 (強従順作用) Delaroché, Brown–小澤 など.

(単位的な時： $G \curvearrowright A$: 強従順 $\iff G \curvearrowright Z(A)$: 従順)

$\rightsquigarrow$ バウム＝コンヌ予想への応用 (Higson–Kasparov, Tu, Higson) がある.
しかし本質的に可換な現象なので、作用素環論的な深みには欠ける.
これは本当に正しい定義なのか？

重要な発見：(18' 鈴木) 実はそうでなかった.

私が気づくまで、40 年近く、フォンノイマン環の場合が red herring になっており、誰も非可換従順作用の正しい姿に至らなかった.

しかし流石に誰も疑問に思っていなかった訳ではなく, Delaroché は有名論文 (02' TAMS) で次のような疑問を残していた.

Anantharaman-Delaroché '02, Section 9.2 Questions (c), (d)

- $G \curvearrowright A$; A : 単純 C^* 環, $A \rtimes_r G = A \rtimes G \Rightarrow G$: 従順?
- 作用の従順性はバンドル構造を保つ同変包含によって, 保たれるか?
(注: 強従順については正しい.)

注: A : 単純の時, $ZM(A) = \mathbb{C}$.
次の定理が重要な最初のステップ

定理 (鈴木'18)

任意の完全可算群はクンツ環 $\mathcal{O}_2$ に従順 (というべき性質を持つ) 作用を持つ.

⇒ 前述の Delaroché の問題二つの否定的解決.

注:

- ほとんどの馴染みのある群は完全:
例) 従順群, 自由群, 双曲群, 線型群 $\Gamma < \mathrm{GL}_d(\mathbb{K})$, 連結群, ...
- Γ : 完全の条件は外せない.
- この時の構成は二通り.
 - (i): 被約接合積 + 無限テンソル積
(⇒ 近似的に中心に振る舞うところで従順性が見つかる. ホンモノの中心ではないことに注意.)
 - (ii) Baire の範疇定理を用いる. (最近使わなくても良いことがわかった. 小澤=鈴木'20)
- 今ではもっと良い構成がある (小澤=鈴木'20) ので, 今回ここは省略する.

クンツ環

$$\mathcal{O}_2 := C^*\{s_1, s_2 : s_1^* s_1 = s_2^* s_2 = s_1 s_1^* + s_2 s_2^* = 1\}$$

古典的・重要な単純・従順 C^* 環. (例えば分類理論で 0 の役割をする.
Extension 理論, Sector 理論などで出てくる.)

先の定理：このような古典的かつ根源的な C^* 環に，たくさんの群の想定していなかった興味深い作用が見つかった.

次の問：

ここに出てきた「従順性」と呼ぶべき諸性質を正しく定式化・特徴づけしたい.

注：単純 C^* 環の中心は自明： $Z(\mathcal{O}_2) = \mathbb{C}$
 $\rightsquigarrow$ 強従順では不十分！

実は抽象的な定義はそれ以前にいくつか検討されていた.
(Delaroché: A^{**} を使う, Exel–Ng: G -Hilbert 双加群 $L^2(G, A)$ を使う.)
先の定理で作った作用がこれらを満たしていることを見るのは容易.

問：これらの条件の関係性？ 他に良い捉え方はあるか？

これを完全解決したのが小澤＝鈴木'20 の主定理の一つ.
(これから新しい基本的諸性質や重要な構成方法が出てくる.)

定理 (小澤=鈴木'20)

C^* -力学系 $\alpha: G \curvearrowright A$ について, 次の条件は互いに同値.

- ① (Exel–Ng の近似性質, cf. Buss–Echterhoff–Willett)
 G -Hilbert C^* 双加群 $L^2(G, A)$ は概中心的, 概不変, 概単位的なベクトルネット $(\xi_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を持つ.

$$\|a\xi_\lambda - \xi_\lambda a\|_2, \|g \cdot \xi_\lambda - \xi_\lambda\|_2, \|\langle \xi_\lambda, \xi_\lambda \rangle_A a - a\| \rightarrow 0.$$

- ② 生西の G -包絡フォンノイマン環

$$G \curvearrowright A''_\alpha$$

が (フォンノイマン環論の意味で) 従順.

- ③ $\exists E: L^\infty(G, Z(A^{**})) \rightarrow Z(A^{**})$
 G -同変条件付き期待値.
- ④ 極限環 A_α^∞ , 中心列環 $F_{\infty, \alpha}(A)$ による特徴づけ.
(これは G が完全の時のみ; 詳細は割愛する.)

この定理の便利さ：

- 条件 (1), (4): 純 C^* 環的な条件
 $\rightsquigarrow$ 作用や接合積を解析するのに使いやすい.
 (例：後述する分類定理.)
- 条件 (2), (3): フォンノイマン環の設定に移植している.
 $\rightsquigarrow$ フォンノイマン環のみに許される明快な構造論が利用できる.
 (例えばイデアルはいつでも直和成分.)

系

- C^* -環への従順作用は閉部分群に制限しても従順.
- その他拡大, (*Pimsner–Popa*) の有限指数包含などで保たれることがすぐにわかる.
 (次に紹介する従順作用の構成法で重要になる.)

コンパクト群作用： $K \curvearrowright A$. 不動点環 A^K :

$$E: \int_K d\mu: A \rightarrow A^K$$

しばしば自然な $K \curvearrowright A$ を持ち, A^K が A より簡単な構造をもつ:

例: ゲージ作用: 普遍 C^* 環の生成元の回転

$$\text{E.g., } \sigma: \mathbb{T} \curvearrowright \mathcal{O}_2$$

$$\sigma_z(s_i) := z s_i; \quad i = 1, 2$$

$$\leadsto \mathcal{O}_2^{\mathbb{T}} = \bigotimes_{\mathbb{N}} M_2(\mathbb{C}).$$

A の性質と酷似 (e.g., 従順性, 完全性 $\leadsto \mathcal{O}_2$ は従順.)

やりたいこと: これの群作用版?

定理 (小澤=鈴木'20)

$$\alpha \times \beta: G \times K \curvearrowright A.$$

この時、次のいずれかが従順であれば、実は全て従順.

① $\alpha \times \beta: G \times K \curvearrowright A.$

② $\alpha: G \curvearrowright A.$

③ $\alpha: G \curvearrowright A^K.$

④ $\alpha: G \curvearrowright A \rtimes K.$

使い方：(3): チェックが容易.

(1), (3): 示したいこと：(複雑な C^* 力学系の従順作用を直接確認するのは無理筋.)

(4): 証明の過程で重要な役割を担う：フォンノイマン環に移行して、指数理論の Wassermann 包含の考え

$$A^K \subset A \rtimes K$$

+ Pimsner-Popa の指数

Pimsner 構成：ヒルベルト A -双加群 $\mathcal{E} \rightsquigarrow \mathcal{T}_{\mathcal{E}}$

$\mathcal{T}_{\mathcal{E}} : A$ と多くの情報を共有している.

Pimsner–Meyer 構成：

$G \curvearrowright A$

$\rightsquigarrow \mathcal{E} : G$ -ヒルベルト A -双加群

$\rightsquigarrow G \curvearrowright \mathcal{T}_{\mathcal{E}} : \text{Bogoljubov 作用}$

$G \curvearrowright \mathcal{T}_{\mathcal{E}} : G \curvearrowright A$ と多くの情報を共有する, 単純 C^* 環上の C^* -力学系.

系

Pimsner–Meyer の構成法は従順性を保つ.

証明：ゲージ作用の不動点環 $\mathcal{T}_{\mathcal{E}}^{\mathbb{T}}$ は $A \otimes \mathbb{K}$ の可算回拡大である. □

帰結：キルヒバーク環上には, 想像しうる限り従順作用がたくさんある！ (cf. 鈴木'22, Gabe–Szabo '22; Haagerup + 完全なら全部 OK!)

注：解析的な障害：群が完全でなければ・・・単位的にはできない.
(Cf. $G \curvearrowright A$ 従順 $\implies G \curvearrowright \mathfrak{S}(A) : \text{従順 (小澤=鈴木'20)}$)

Property (T) etc ... KK^G に制約 (cf. K -amenability).

従順作用の応用： C^* -力学系の分類.

$G \curvearrowright A$: A の構造と深く関係, 新しい作用素環の材料 $A \rtimes G$.

コサイクル共役により分類したい. (A は非可換性が強く, 内部的な対称性による歪み (1-cocycle) は無視したい. しないと無理.)

(応用上十分であることが多い: たとえば $A \rtimes_r G$ が変わらない.)

定理 (Connes, Jones, Ocneanu)

Γ : 可算従順群

この時 AFD II_1 因子環

$$\mathcal{R} := \left\{ \bigotimes_{\mathbb{N}} (M_2(\mathbb{C}), \text{tr}) \right\}''$$

上の外部作用 (e.g. *Bernoulli* シフト)

$$\Gamma \curvearrowright \mathcal{R}$$

は互いにコサイクル共役.

上の定理： Γ : 従順 これはいるのか？
本当に必要！

定理 (Converse to Ocneanu's Theorem; Jones, Popa, Brothier–Vaes)

Γ : 可算非従順群

この時 $\exists \alpha_t: \Gamma \curvearrowright \mathcal{R}; t \in \mathbb{R}$; 外部作用で,

$$\mathcal{R} \overline{\rtimes}_{\alpha_s} \Gamma \not\cong \mathcal{R} \overline{\rtimes}_{\alpha_t} \Gamma; s \neq t$$

となるものが構成できる.

・・・というわけで,
これまでの常識：単純作用素環上の群作用の分類：群の従順性が不可欠.
(Cf. ロホリン性；ある意味 Ocneanu や岸本のアイデアが強烈すぎた.)
これを打ち破ったのが次の発見.

定理 (鈴木 '20)

Γ : 完全可算群 (e.g., $\mathbb{F}_d$, $\Gamma < \mathrm{GL}_d(\mathbb{K})$.)

この時従順, $\mathcal{O}_2$ -同変吸収な外部作用

$$\delta: \Gamma \curvearrowright \mathcal{O}_2$$

はコサイクル共役を除いてちょうど一つある.

系 (Kirchberg $\mathcal{O}_2$ 吸収定理の群作用版, 鈴木'20)

$A: \exists 1_A$, 単純, 可分, 核型 C^* 環, $\alpha: \Gamma \curvearrowright A$.

この時, いつでも $\alpha \otimes \delta$ と δ はコサイクル共役.

他にも Kirchberg の $\mathcal{O}_2$ 埋め込み定理, $\mathcal{O}_\infty$ 吸収定理の同変版が完全可算群について示せる.

キルヒバーク環上の群作用の分類定理：最近次の形で完成した.

定理 (Dynamical Kirchberg–Phillips Theorem, Gabe–Szabo '22)

G : 第二可分局所コンパクト群 のキルヒバーク環上の従順 + *Isometrically Shift Absorbing* である作用 $G \curvearrowright A$ は同変 KK 同値で分類できる.

注: G : 離散の時は $ISA \iff$ 外部性 (かなり緩い条件).

$G = \mathbb{R}^d$ の時は, ロホリン性と同値.

基本方針: Dadarlat–Eilers による分類定理の証明 (Stable Uniqueness Theorem, Absorbing cocycle morphism,...) の同変版を作る.

重要な道具:

Isometrically Shift Absorbing:

$L^2(G, A)$ が, A にほとんど中心・同変・等距離に埋め込める!

群作用の従順性:

解析に必要な元を $(C_b(G, A)$ でなく) $L^2(G, A)$ の中で構成できる!

これら二つが補完しあって, A^∞ (や関連する環, 射) を深いレベルで解析できるようになった.

今後の課題，発展：

$\mathcal{O}_2$, $\mathcal{O}_\infty$, キルヒバーク環：無限型の単純 C^* 環 $\rightsquigarrow$ 順序構造やトレースのデータがなく，構造が均質なので調べやすい.

より古典的な C^* 環 (e.g., CAR 環, AF 環) : 有限型

$\rightsquigarrow$ トレースや射影・正元の順序構造が豊かで鮮やか (Elliott 不変量, Cuntz 半群)

- 小澤＝鈴木のような強力で画一的な構成法や，
- Gabe–Szabo の分類定理

の類似版が有限型でもできないか？（未解決）

・・・そもそも面白い従順作用はある？

定理 (鈴木'22)

任意の可算群 Γ は安定有限単純 C^* 環上に従順作用 $\Gamma \curvearrowright A$ をもつ.

構成で使ったもの:

- ① $c_0(\Gamma)$ (プロパー作用 $\Gamma \curvearrowright \Gamma$)
- ② ケーリーグラフの (非正規) ラプラシアン $\Delta_S: c_0(\Gamma) \rightarrow c_0(\Gamma)$
- ③ 全フォック空間

$$\mathcal{F}(\ell^2(\Gamma)) := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \ell^2(\Gamma)^{\otimes n}$$

と, 左生成作用素 $c(\delta_g)\xi := \delta_g \otimes \xi$.

- ④ 単純 C^* 環 B と, その上のトレース τ を縮める自己同型 $\alpha \in \text{Aut}(B)$:

$$\tau \circ \alpha = \frac{1}{|S|} \tau.$$

- (1): 従順性の泉源. (2), (3): イデアルを減らしていくための肝.
(4): $c_0(\Gamma)$ のトレースを維持するために重要.

上の構成：それなりにたくさん、しかも結構面白いものが出てくる。
例えば

$$\Gamma \curvearrowright T(A) \cong \Gamma \curvearrowright \ker(\text{id} - \Delta_S)_+$$

となるよう作れる．難しさ：

- そもそも群作用抜きにしてもそのような構成は知られていない．
- $\Gamma \curvearrowright A$ 従順の時， $\Gamma \curvearrowright T(A)$ には制約がある．（例えば各 extremal ray $L \subset T(A)$ の stabilizer は従順．特に $T(A) \not\cong \mathbb{R}_+$ ．）
($\mathbb{F}_2$ でも不変量に障害がある．これを特定できるか？)
- 作用抜きでも病的な例 (Villadsen): Villadsen 環の従順作用版？

分類？

- Isometrically Shift Absorbing は無限型でのみ成立する条件
 $\mathcal{O}_\infty \rightsquigarrow \mathcal{Z}$ の同変版？
(Cuntz 環 $\subset$ 中心列環.)
- 現在論文執筆中 (とされている) "Abstract な分類定理の証明 (Gabe, Schafhauser et al)" が本当に出来ていれば (「正しい証明」なら)，そこに重大なヒントがありそうな気がする．